# 解析学 I　解答例

2018.01.22

■　実数 $p$，$q$，$a$，$b$ を予め与えて，数列 $\{x_n\}$ を

$$x_1 = a, \qquad x_2 = b, \qquad x_{n+2} = p\,x_{n+1} + q\,x_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

により定めるとき，$\{x_n\}$ の一般項を求めよ．ただし，$q \neq 0$ とする．

**(解)**　特性方程式 $x^2 = p\,x + q$ の解を $\alpha$，$\beta$ とすると，解と係数の関係により $\alpha + \beta = p$，$\alpha\,\beta = -q$ である．

(a) $\alpha \neq \beta$ の場合：漸化式より

$$\begin{aligned} x_{n+1} - \alpha\,x_n =& (\alpha+\beta)\,x_n - \alpha\,\beta\,x_{n-1} - \alpha\,x_n = \beta\,(x_n - \alpha\,x_{n-1}) \\ =& \beta^2\,(x_{n-1} - \alpha\,x_{n-2}) = \cdots = \beta^{n-1}\,(x_2 - \alpha\,x_1) = \beta^{n-1}\,(b - \alpha\,a), \\ x_{n+1} - \beta\,x_n =& \alpha\,(x_n - \beta\,x_{n-1}) = \alpha^2\,(x_{n-1} - \beta\,x_{n-2}) = \cdots = \alpha^{n-1}\,(b - \beta\,a) \end{aligned}$$

が成り立つので，

$$x_n = \frac{\beta^{n-1}\,(b - \alpha\,a) - \alpha^{n-1}\,(b - \beta\,a)}{\beta - \alpha}$$

となる．

(b) $\alpha = \beta$ の場合：$p = 2\,\alpha$，$q = -\alpha^2$ より，$\alpha \neq 0$ であり，

$$\begin{aligned} x_{n+1} - \alpha\,x_n =& 2\,\alpha\,x_n - \alpha^2\,x_{n-1} - \alpha\,x_n = \alpha\,(x_n - \alpha\,x_{n-1}) \\ =& \alpha^2\,(x_{n-1} - \alpha\,x_{n-2}) = \cdots = \alpha^{n-1}\,(x_2 - \alpha\,x_1) = \alpha^{n-1}\,(b - \alpha\,a) \end{aligned}$$

が得られる．$x_n = \alpha^n\,y_n$ とおくと，$y_1 = a/\alpha$ であり，

$$y_{n+1} - y_n = \frac{x_{n+1}}{\alpha^{n+1}} - \frac{x_n}{\alpha^n} = \frac{x_{n+1} - \alpha\,x_n}{\alpha^{n+1}} = \frac{b - \alpha\,a}{\alpha^2}$$

が得られるので，

$$y_n = \frac{a}{\alpha} + (n-1)\,\frac{b - \alpha\,a}{\alpha^2} = \frac{2\,\alpha\,a - b + (b - \alpha\,a)\,n}{\alpha^2}$$

より

$$x_n = \alpha^{n-2}\,\{2\,\alpha\,a - b + (b - \alpha\,a)\,n\}$$

となる．■