解析学 II　解答例

2017.04.10

■　弧度法について述べよ．また，極限

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$$

を調べよ．

(解)　xy 平面上の原点 O$(0,0)$ を中心とする半径 1 の円を C，点 A を $(1,0)$ とする．円 C 上の任意の点を P に対して，$\theta = \angle\mathrm{AOP}$ （単位：度）を中心角とする扇型 AOP の弧 AP の長さを x とすると，

$$x = 2\,\pi \cdot \frac{\theta}{360} = \frac{\pi}{180} \cdot \theta \quad \Longleftrightarrow \quad \theta = \frac{180}{\pi} \cdot x$$

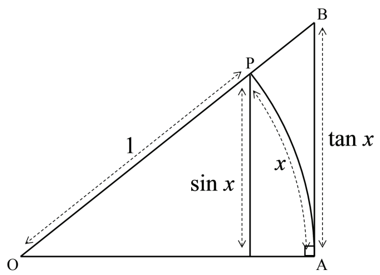
により，弧 AP の長さ x を用いて，中心角 θ を定めることができる．このように，弧長 x により中心角を測る方法を弧度法といい，単位はラジアンである．半径が $r > 0$ の場合には，中心角 θ に対する弧長 ℓ は

$$\ell = 2\,\pi\,r \cdot \frac{\theta}{360} = r\,x \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\ell}{r} = x$$

と表せるので，x は半径 r と弧長 ℓ の長さの比であり，その扇型の面積 S は

$$S = \pi\,r^2\,\frac{\theta}{360} = \frac{r\,\ell}{2}$$

により求めることができる．



図形の面積を比較すると

$$(\triangle\mathrm{AOP}\ \text{の面積}) = \frac{\sin x}{2} < (\text{扇型 AOP の面積}) = \frac{x}{2} < (\triangle\mathrm{AOB}\ \text{の面積}) = \frac{\tan x}{2}$$

が得られるので，$x > 0$ のとき不等式

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

が成り立つ．$x < 0$ のときにも上記の不等式を示すことができるので，はさみうちの原理より

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

である．■