解析学 II　解答例

2017.05.01

■　常螺旋は定数 $a>0$，$b>0$ を用いて

$$x=x(t)=a\,\cos t,\qquad y=y(t)=a\,\sin t,\qquad z=z(t)=b\,t$$

と表せる．このとき，$t=0$ とした点 $(a,0,0)$ からの弧長 s を用いて常螺旋を表し，曲率 $\kappa(s)$ と捩率 $\tau(s)$ を求めよ．

（解）　弧長 s は

$$s=\int_0^t\sqrt{x'(u)^2+y'(u)^2+z'(u)^2}\,du=\int_0^t\sqrt{(-a\,\sin u)^2+(a\,\cos u)^2+b^2}\,du=\sqrt{a^2+b^2}\,t$$

と表されるので，$\gamma=1/\sqrt{a^2+b^2}$ とおくと，常螺旋 $\mathbf{p}(s)$ は

$$\mathbf{p}(s)=\begin{pmatrix}a\,\cos\gamma\,s\\ a\,\sin\gamma\,s\\ b\,\gamma\,s\end{pmatrix}$$

と表せる．

$$\mathbf{e}_1(s)=\mathbf{p}'(s)=\begin{pmatrix}-a\,\gamma\,\sin\gamma\,s\\ a\,\gamma\,\cos\gamma\,s\\ b\,\gamma\end{pmatrix},\qquad \mathbf{e}_1'(s)=\begin{pmatrix}-a\,\gamma^2\,\cos\gamma\,s\\ -a\,\gamma^2\,\sin\gamma\,s\\ 0\end{pmatrix},$$
$$\kappa(s)=\|\,\mathbf{e}_1'(s)\,\|=a\,\gamma^2=\frac{a}{a^2+b^2}$$

が得られるので，

$$\mathbf{e}_2(s)=\frac{\mathbf{e}_1'(s)}{\|\,\mathbf{e}_1'(s)\,\|}=\begin{pmatrix}-\cos\gamma\,s\\ -\sin\gamma\,s\\ 0\end{pmatrix},\qquad \mathbf{e}_3(s)=\mathbf{e}_1(s)\times\mathbf{e}_2(s)=\begin{pmatrix}b\,\gamma\,\sin\gamma\,s\\ -b\,\gamma\,\cos\gamma\,s\\ a\,\gamma\end{pmatrix}$$

となり，

$$\tau(s)=\mathbf{e}_2'(s)\cdot\mathbf{e}_3(s)=\begin{pmatrix}\gamma\,\sin\gamma\,s\\ -\gamma\,\cos\gamma\,s\\ 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b\,\gamma\,\sin\gamma\,s\\ -b\,\gamma\,\cos\gamma\,s\\ a\,\gamma\end{pmatrix}=b\,\gamma^2=\frac{b}{a^2+b^2}$$

である．■