

解析学 II 解答例

2017.05.08

■ 直交座標系における点 (x, y) が極座標系で (r, θ) と表されるとする。つまり、 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ であるとする。このとき、全微分 dx , dy および外積 $dx \wedge dy$ を求めよ。

(解) $dx = \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta$, $dy = \sin \theta dr + r \cos \theta d\theta$ であるから、

$$\begin{aligned} dx \wedge dy &= (\cos \theta dr - r \sin \theta d\theta) \wedge (\sin \theta dr + r \cos \theta d\theta) \\ &= \cos \theta \sin \theta dr \wedge dr - r \sin^2 \theta d\theta \wedge dr + r \cos^2 \theta dr \wedge d\theta - r^2 \sin \theta \cos \theta d\theta \wedge d\theta \\ &= r \sin^2 \theta dr \wedge d\theta + r \cos^2 \theta dr \wedge d\theta = r(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) dr \wedge d\theta = r dr \wedge d\theta \end{aligned}$$

となる。 ■