解析学 II　解答例

2017.05.15

■　関数 $f(\theta)$ （$0 \leq \theta \leq 2\pi$） が $f(0) = f(2\pi)$ をみたし，各 θ に対して正の値を取る連続関数であるとき，極方程式 $r = f(\theta)$ で表される曲線で囲まれる図形の面積 S は

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \{f(\theta)\}^2\, d\theta$$

と表せることを示せ．

（解）　$x = f(\theta)\cos\theta$，$y = f(\theta)\sin\theta$ であるから，

$$\begin{aligned}-y\frac{dx}{d\theta} + x\frac{dy}{d\theta} &= -f(\theta)\sin\theta\{f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta\} \\ &\quad + f(\theta)\cos\theta\{f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta\} = \{f(\theta)\}^2\end{aligned}$$

となり，

$$S = \frac{1}{2}\int_C -y\,dx + x\,dy = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left\{-y\frac{dx}{d\theta} + x\frac{dy}{d\theta}\right\}d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\{f(\theta)\}^2\,d\theta$$

と表せる．■