解析学 II　解答例

2017.06.12

■　n を自然数とするとき，関数 $f(x) = |\,x\,|^n$ は何回微分できるか調べよ．

(解)　(1) n が偶数の場合には，$f(x) = x^n$ より $f(x)$ は無限回微分可能である．(2) n が奇数の場合を考える．$f^{(0)}(x) = f(x)$ とおくと，$f^{(0)}(0) = 0$ である．

$$f(x) = \begin{cases} -x^n & (x < 0) \\ x^n & (x \geq 0) \end{cases}$$

より，自然数 $k \leq n$ に対して

$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} -{}_nP_k\, x^{n-k} & (x < 0) \\ {}_nP_k\, x^{n-k} & (x > 0) \end{cases}$$

である．整数 $0 \leq k \leq n-2$ に対して $f^{(k)}(0) = 0$ と仮定すると，

$$\lim_{h\to 0}\left|\,\frac{f^{(k)}(h) - f^{(k)}(0)}{h}\,\right| = \lim_{h\to 0}({}_nP_k\,|\,h\,|^{n-k-1}) = 0$$

より $f^{(k+1)}(0) = 0$ である．したがって，すべての整数 $0 \leq k < n$ に対して $f^{(k)}(0) = 0$ が成り立つので，$f(x)$ については第 $(n-1)$ 階までの導関数が存在する．

$$\lim_{h\to -0}\frac{f^{(n-1)}(h) - f^{(n-1)}(0)}{h} = \lim_{h\to -0}(-{}_nP_{n-1}) = -{}_nP_{n-1} < 0,$$
$$\lim_{h\to +0}\frac{f^{(n-1)}(h) - f^{(n-1)}(0)}{h} = \lim_{h\to +0}{}_nP_{n-1} = {}_nP_{n-1} > 0,$$

より $f^{(n-1)}(x)$ は $x = 0$ で微分できないので，$f(x)$ の第 n 階導関数は存在しない．■