# 解析学概論　解答例

2017.10.10

■　整数係数の 2 次方程式 $x^2 + a\,x + b = 0$ の解が有理数であれば，それは整数であることを示せ．

**（解）** $b = 0$ の場合には示すべきことは明らかに成り立つので，$b \neq 0$ の場合について考える．このとき，与えられた方程式の解は 0 とはならないことに注意したい．

**証明 1：**　与えられた方程式の解 $\alpha$ が自然数 $p$ と整数 $q$ （$\gcd(p, q) = 1$，$q \neq 0$）を用いて $\alpha = q/p$ と表されているとする．方程式に代入すると

$$\frac{q^2}{p^2} + a \cdot \frac{q}{p} + b = 0, \qquad \text{つまり}, \quad q^2 = -(a\,q + b\,p)\,p$$

であるから，$q^2$ は $p$ で割り切れる．$p \geq 2$ と仮定すると，$p$ はある素数 $r \geq 2$ で割り切れるので，$q$ の素因数分解を考えると，$q$ も素数 $r$ で割り切れることになり，$\gcd(p, q) \geq r \geq 2$ となる．これは $\gcd(p, q) = 1$ に矛盾するので，$p = 1$ である．したがって，$\alpha$ は整数である．

**証明 2：**　与えられた方程式の解 $\alpha$ とする．命題「$\alpha$ が有理数ならば，$\alpha$ は整数である」を示せばよい．否定命題「$\alpha$ が有理数であり，かつ，$\alpha$ は整数でない」を仮定する．このとき，$\alpha$ は自然数 $p$ と整数 $q$（$\gcd(p, q) = 1$，$p \geq 2$，$q \neq 0$）を用いて $\alpha = q/p$ と表される．方程式に代入すると

$$\frac{q^2}{p^2} + a \cdot \frac{q}{p} + b = 0, \qquad \text{つまり}, \quad q^2 = -(a\,q + b\,p)\,p$$

であるから，$q^2$ は $p$ で割り切れる．$p$ はある素数 $r \geq 2$ で割り切れるので，$q$ の素因数分解を考えると，$q$ も素数 $r$ で割り切れることになり，$\gcd(p, q) \geq r \geq 2$ となる．これは $\gcd(p, q) = 1$ に矛盾する．背理法により，$\alpha$ が有理数ならば，$\alpha$ は整数である．■