解析学概論　解答例

2017.10.16

■　次の命題が真ならば証明を，偽ならば反例を示せ．

(1) すべての $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ に対して，$|\,x\,|+|\,y\,|\leq 1$ ならば $|\,x\,|^2+|\,y\,|^2\leq 1$ である．

(2) すべての $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ に対して，$|\,x\,|^2+|\,y\,|^2\leq 1$ ならば $|\,x\,|^3+|\,y\,|^3\leq 1$ である．

(3) すべての $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ に対して，$x+y\leq 1$ ならば $x^2+y^2\leq 1$ である．

(4) すべての $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ に対して，$x^2+y^2\leq 1$ ならば $x^3+y^3\leq 1$ である．

（解） (1):　真である．$|\,x\,|+|\,y\,|\leq 1$ より $|\,x\,|\leq 1$，$|\,y\,|\leq 1$ が成り立つので，

$$|\,x\,|^2+|\,y\,|^2=|\,x\,|\cdot|\,x\,|+|\,y\,|\cdot|\,y\,|\leq 1\cdot|\,x\,|+1\cdot|\,y\,|=|\,x\,|+|\,y\,|\leq 1$$

が成り立つ．

(2):　真である．$|\,x\,|^2+|\,y\,|^2\leq 1$ より $|\,x\,|^2\leq 1$，$|\,y\,|^2\leq 1$ が成り立つので，$|\,x\,|\leq 1$，$|\,y\,|\leq 1$ が得られ，

$$|\,x\,|^3+|\,y\,|^3=|\,x\,|\cdot|\,x\,|^2+|\,y\,|\cdot|\,y\,|^2\leq 1\cdot|\,x\,|^2+1\cdot|\,y\,|^2=|\,x\,|^2+|\,y\,|^2\leq 1$$

が成り立つ．

(3):　偽である．$x=1$，$y=-1$ とおくと，$x+y=0\leq 1$ であるが，$x^2+y^2=2>1$ である．

(4):　真である．$|\,x\,|^2+|\,y\,|^2=x^2+y^2\leq 1$ より，(2) を用いると $|\,x\,|^3+|\,y\,|^3\leq 1$ である．また，$x\leq|\,x\,|$，$y\leq|\,y\,|$ より

$$x^3+y^3\leq|\,x\,|^3+|\,y\,|^3\leq 1$$

が成り立つ．■