解析学概論　解答例

2017.10.23

■　次の問いに答えよ．

(1) $A_1 = [-3, 1]$，$A_2 = [-1, 3]$ とするとき，$f(x) = x^2 - 1$ についての像 $f(A_1)$，$f(A_2)$，$f(A_1 \cap A_2)$ を求めよ．

(2) $f(x) = x^3$ とするとき，$\mathbb{R}$ の任意の部分集合 A_1，A_2 に対して $f(A_1) \cap f(A_2) = f(A_1 \cap A_2)$ が成り立つことを示せ．

（解） (1):　関数 $y = f(x)$ のグラフと $A_1 \cap A_2 = [-1, 1]$ より $f(A_1) = [-1, 8]$，$f(A_2) = [-1, 8]$，$f(A_1 \cap A_2) = [-1, 0]$ となる．ここで，

$$f(A_1 \cap A_2) = [-1, 0] \subsetneqq [-1, 8] = f(A_1) \cap f(A_2)$$

であることに注意したい．

(2):　$\mathbb{R}$ の任意の部分集合 B_1，B_2 が $B_1 \subset B_2$ をみたすと仮定する．$y \in f(B_1)$ を任意に取ると，ある $x \in B_1$ が存在して $f(x) = y$ が成り立ち，$x \in B_1 \subset B_2$ より $y = f(x) \in f(B_2)$ となる．したがって，$B_1 \subset B_2$ ならば $f(B_1) \subset f(B_2)$ が成り立つ．

$$A_1 \cap A_2 \subset A_1, \qquad A_1 \cap A_2 \subset A_2$$

より

$$f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1), \qquad f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_2)$$

が得られるので，$f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$ が成り立つ．また，$y \in f(A_1) \cap f(A_2)$ を任意に取る．$y \in f(A_1)$ かつ $y \in f(A_2)$ であるから，ある $x_1 \in A_1$，$x_2 \in A_2$ が存在して $y = f(x_1)$，$y = f(x_2)$ が成り立つ．

$$0 = f(x_1) - f(x_2) = x_1^3 - x_2^3 = (x_1 - x_2)\,(x_1^2 + x_1\,x_2 + x_2^2)$$

より $x_1 = x_2 \in A_1 \cap A_2$ であるから，$y = f(x_1) \in f(A_1 \cap A_2)$ となる．したがって，$f(A_1) \cap f(A_2) \subset f(A_1 \cap A_2)$ が成り立つ．■