解析学概論　解答例

2017.10.30

■　a を実数とし，行列 A および線形写像 $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ をそれぞれ

$$A=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix},\qquad T(\mathbf{x})=A\,\mathbf{x}\quad(\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2)$$

により定義するとき，次の問いに答えよ．

(1) $a\neq\pm1$ のとき，$T(\mathbf{x})$ は単射かつ全射であることを示せ．

(2) $a=\pm1$ のとき，$T(\mathbb{R}^2)$ を求めよ．

（解） (1):　$a\neq\pm1$ のとき，$\det A=a^2-1\neq0$ より A の逆行列 A^{-1} が存在することに注意したい．$T(\mathbf{x}_1)=T(\mathbf{x}_2)$ とすると，左から A^{-1} を掛けることにより

$$\mathbf{x}_1=A^{-1}A\,\mathbf{x}_1=A^{-1}T(\mathbf{x}_1)=A^{-1}T(\mathbf{x}_2)=A^{-1}A\,\mathbf{x}_2=\mathbf{x}_2$$

が得られるので，$T(\mathbf{x})$ は単射である．また，任意の $\mathbf{y}\in\mathbb{R}^2$ に対して，$\mathbf{x}$ を $\mathbf{x}=A^{-1}\mathbf{y}\in\mathbb{R}^2$ により定めると，$\mathbf{y}=A\,\mathbf{x}$ が得られるので，$T(\mathbf{x})$ は全射である．

(2):　方程式 $A^T\mathbf{x}=\mathbf{0}$ の非自明な解として $\mathbf{v}=(1,-a)^T$ が取れ，

$$\operatorname{Ker}A^T=\{\,\alpha\,\mathbf{v}\mid\alpha\in\mathbb{R}\,\}$$

が成り立つ．また，任意の $\mathbf{y}\in T(\mathbb{R}^2)$ に対して，$\mathbf{y}=A\,\mathbf{x}$ をみたす $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2$ が取れ，

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{y}=\mathbf{v}\cdot(A\,\mathbf{x})=(A^T\mathbf{v})\cdot\mathbf{x}=\mathbf{0}\cdot\mathbf{x}=0$$

が得られる，つまり，$\mathbf{v}$ と $\mathbf{y}\in T(\mathbb{R}^2)$ は直交することに注意したい．

$$\begin{aligned}\mathbf{x}\in\operatorname{Ker}A^T &\iff A^T\mathbf{x}=\mathbf{0}\iff\forall\mathbf{y}\in\mathbb{R}^2:(A^T\mathbf{x})\cdot\mathbf{y}=0\\ &\iff\forall\mathbf{y}\in\mathbb{R}^2:\mathbf{x}\cdot(A\,\mathbf{y})=0\\ &\iff\forall\mathbf{y}\in T(\mathbb{R}^2):\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=0\iff\mathbf{x}\in T(\mathbb{R}^2)^{\perp}\end{aligned}$$

より

$$T(\mathbb{R}^2)=(\operatorname{Ker}A^T)^{\perp}=\{\,\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2\mid\mathbf{v}\cdot\mathbf{x}=0\,\}$$

である．■