解析学概論　解答例

2017.11.06

■　次の問いに答えよ．

(1) 自然数 $n \geq 2$ に対して，n と $n+1$ は互に素であることを示せ．

(2) $p > 1$ を素数とする．整数 $\mathbb{Z}$ における二項関係 $\sim$ を

$$n \sim m \quad \Longleftrightarrow \quad n - m \text{ は } p \text{ で整除できる}$$

で定義するとき，二項関係 $\sim$ は $\mathbb{Z}$ における同値関係かどうかを調べよ．

（解） (1):　整数 m，ℓ が互いに素であることと，方程式 $mx + \ell y = 1$ をみたす整数 x，y が存在することは同値であることに注意すると，

$$n \cdot (-1) + (n+1) \cdot 1 = 1$$

より n と $n+1$ は互に素である．

(2):　(i) $n \in \mathbb{Z}$ に対して，$n - n = 0 = 0 \cdot p$ より，$n \sim n$ が成り立つ．(ii) $n \sim m$ とする．二項関係 $\sim$ の定義により，ある $k \in \mathbb{Z}$ が存在して，$n - m = k \cdot p$ が成り立つ．$-k \in \mathbb{Z}$ であり，$m - n = (-k) \cdot p$ となるので，$m \sim n$ が得られる．(iii) $n \sim m$ かつ $m \sim \ell$ とする．二項関係 $\sim$ の定義により，ある k_1，$k_2 \in \mathbb{Z}$ が存在して，$n - m = k_1 \cdot p$ かつ $m - \ell = k_2 \cdot p$ が成り立つ．$k_1 + k_2 \in \mathbb{Z}$ であり，

$$n - \ell = (n - m) + (m - \ell) = (k_1 + k_2) \cdot p$$

となるので，$n \sim \ell$ が得られる．以上から，二項関係 $\sim$ は $\mathbb{Z}$ における同値関係である．■