解析学概論　解答例

2017.11.20

■　区間 $[0,1]$ から $\mathbb{R}$ への関数全体を $F[0,1]$ と表し，$F[0,1]$ 上の二項関係 $\overset{R}{\le}$ を

$$f \overset{R}{\le} g \quad \Leftrightarrow \quad \forall t \in [0,1] : f(t) \le g(t)$$

により定義するとき，次の問いに答えよ．

(1) 二項関係 $\overset{R}{\le}$ は順序関係であることを示せ．

(2) 二項関係 $\overset{R}{\le}$ は全順序関係であるかどうか調べよ．

（解） (1): (i) 任意に $f \in F[0,1]$ を取る．すべての $t \in [0,1]$ に対して $f(t) \le f(t)$ であるから，$f \overset{R}{\le} f$ が成り立つ．(ii) $f \overset{R}{\le} g$ かつ $g \overset{R}{\le} f$ 仮定すると，すべての $t \in [0,1]$ に対して，$f(t) \le g(t)$ かつ $g(t) \le f(t)$ であるから，$f(t) = g(t)$ が成り立つ．写像の相等により $f = g$ である．(iii) $f \overset{R}{\le} g$ かつ $g \overset{R}{\le} h$ 仮定すると，すべての $t \in [0,1]$ に対して，$f(t) \le g(t)$ かつ $g(t) \le h(t)$ であるから，$f(t) \le h(t)$ が成り立つ．二項関係 $\overset{R}{\le}$ の定義により $f \overset{R}{\le} h$ である．以上から，二項関係 $\overset{R}{\le}$ は順序関係である．

(2): $f(x) = x$，$g(x) = 1 - x$ とおくと，$f \in F[0,1]$，$g \in F[0,1]$ である．

$$f(0) = 0 < 1 = g(0), \qquad g(1) = 0 < 1 = f(1)$$

より $f \overset{R}{\le} g$ および $g \overset{R}{\le} f$ は成り立たないので，二項関係 $\overset{R}{\le}$ は全順序関係ではない．■