解析学概論　解答例

2017.11.27

■　数学的帰納法を用いて，すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$n! \geq 2^{n-1} \tag{E}$$

が成り立つことを示せ．

（解） (i) $n = 1$ のとき，

$$（左辺）= 1! = 1, \qquad （右辺）= 2^{1-1} = 1$$

であるから，(E) が成り立つ．(ii) $n = k$ のとき (E) が成り立つと仮定する．$k \geq 1$ より $k + 1 \geq 2$ であるから，

$$(k+1)! = (k+1) \cdot k! \geq (k+1) \cdot 2^{k-1} \geq 2 \cdot 2^{k-1} = 2^{(k+1)-1}$$

となり，$n = k + 1$ のときも (E) が成り立つ．数学的帰納法により，すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して (E) が成り立つ．■