解析学概論　解答例

2017.12.04

■ $p \geq 2$ を素数とし，整数の集合 $\mathbb{Z}$ における二項関係 $\sim$ を

$$n \sim m \quad \Leftrightarrow \quad n - m \text{ は } p \text{ で整除できる}$$

により定義するとき，二項関係 $\sim$ は $\mathbb{Z}$ における同値関係である（証明しなくてもよい）．また，二項関係 $\sim$ による n を代表元とする $\mathbb{Z}$ の同値類を $C(n)$ と表し，$\mathbb{Z}/\!\sim$ における演算 $\oplus$ および $\otimes$ をそれぞれ

$$C(n) \oplus C(m) = C(n+m), \qquad C(n) \otimes C(m) = C(n \cdot m)$$

に定義するとき，演算 $\oplus$ および $\otimes$ は代表元の取り方に依存せずにうまく定義できていることを示せ．

（解） $n \sim q$，$m \sim r$ とする．このとき，$C(n) = C(q)$，$C(m) = C(r)$ であることと同値である．二項関係 $\sim$ の定義より，ある整数 k_1，k_2 が取れて，$n - q = k_1 \cdot p$，$m - r = k_2 \cdot p$ が成り立つので，

$$\begin{aligned} (n+m) - (q+r) =& (n-q) + (m-r) = k_1 \cdot p + k_2 \cdot p = (k_1 + k_2) \cdot p, \\ n \cdot m - q \cdot r =& (q + k_1 \cdot p) \cdot (r + k_2 \cdot p) - q \cdot r = p \cdot (k_1 \cdot r + k_2 \cdot q + k_1 \cdot k_2 \cdot p) \end{aligned}$$

となり，$n + m \sim q + r$ および $n \cdot m \sim q \cdot r$ が得られる．したがって，演算 $\oplus$ および $\otimes$ は代表元の取り方に依存せずにうまく定義できている．■