解析学概論　解答例

2017.12.11

■　二項係数 ${}_nC_k$ （$n \in \mathbb{N}$，$0 \leq k \leq n$）は自然数であることを示せ．

（解） 命題 P_n （$n \in \mathbb{N}$）を「すべての $0 \leq k \leq m$ に対して ${}_nC_k$ は自然数である」とする．

(I) $n = 1$ のとき，${}_1C_0 = 1$，${}_1C_1 = 1$ より命題 P_1 が成り立つ．

(II) 命題 P_ℓ が成り立つと仮定する．二項係数の定義より ${}_{\ell+1}C_0 = 1$，${}_{\ell+1}C_{\ell+1} = 1$ であることに注意したい．$1 \leq k \leq n$ の場合には，命題 P_ℓ と

$$\begin{aligned}
{}_{\ell+1}C_k &= \frac{(\ell+1)!}{k!\,(\ell+1-k)!} = \frac{\{(\ell+1-k)+k\}\,\ell!}{k!\,(\ell+1-k)!} = \frac{(\ell+1-k)\,\ell!}{k!\,(\ell+1-k)!} + \frac{k\,\ell!}{k!\,(\ell+1-k)!} \\
&= \frac{\ell!}{k!\,(\ell-k)!} + \frac{\ell!}{(k-1)!\,\{\ell-(k-1)\}!} = {}_\ell C_k + {}_\ell C_{k-1}
\end{aligned}$$

より ${}_{\ell+1}C_k$ は自然数である．したがって，命題 $P_{\ell+1}$ が成り立つ．

数学的帰納法により，すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して命題 P_n が成り立つ．したがって，すべての $n \in \mathbb{N}$，$0 \leq k \leq n$ に対して二項係数 ${}_nC_k$ は自然数である．■