解析学概論　解答例

2017.12.18

■　写像 $\Psi_n : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ （$n \in \mathbb{N}_0$）を次のように帰納的に定義する．

(i) $\Psi_n(0) = 0$

(ii) $\Psi_n(S(m)) = \Psi_n(m) + n \qquad (m \in \mathbb{N}_0)$

ここで，$S(m)$ は m の後継者である．このとき，すべての $n \in \mathbb{N}_0$ に対して $\Psi_n(0) = 0 = \Psi_0(n)$ が成り立つことを示せ．

（解） すべての $n \in \mathbb{N}_0$ に対して $\Psi_n(0) = 0$ が成り立つことは定義から明らかであるから，すべての $n \in \mathbb{N}_0$ に対して $\Psi_0(n) = 0$ が成り立つことを示す．

(I) $n = 0$ のとき，定義 (i) より $\Psi_0(0) = 0$ である．

(II) $\Psi_0(k) = 0$ が成り立つと仮定すると，

$$\Psi_0(S(k)) \overset{\text{(ii)}}{=} \Psi_0(k) + 0 \overset{\text{仮定}}{=} 0 + 0 \overset{\text{単位元}}{=} 0$$

が成り立つ．

数学的帰納法により，すべての $n \in \mathbb{N}_0$ に対して $\Psi_0(n) = 0$ が成り立つ．■