解析学概論　解答例

2018.01.09

■　各 $n \in \mathbb{N}_0$ に対して，写像 $\Psi_n : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ を

(i) $\Psi_n(0) = 0$ であり，

(ii) すべての $m \in \mathbb{N}_0$ に対して $\Psi_n(S(m)) = \Psi_n(m) + n$ である，

と帰納的に定義するとき，すべての n，$m \in \mathbb{N}_0$ に対して $\Psi_n(m) = \Psi_m(n)$ が成り立つことを示せ．ここで，写像 $S : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ は後継者を対応させるものとする．

（解）　証明済みの関係式

$$\Psi_n(0) = 0 = \Psi_0(n), \qquad n \in \mathbb{N}_0, \tag{1}$$
$$\Psi_{S(n)}(m) = \Psi_n(m) + m, \qquad n, m \in \mathbb{N}_0 \tag{6}$$

を用いる．$n \in \mathbb{N}_0$ を任意に取り固定する．(a) $m = 0$ のとき，(1) より $\Psi_n(0) = \Psi_0(n)$ が成り立ち，(b) $m = k$ のとき $\Psi_n(k) = \Psi_k(n)$ が成り立つと仮定すると，

$$\Psi_n(S(k)) \overset{\text{(ii)}}{=} \Psi_n(k) + n \overset{\text{仮定}}{=} \Psi_k(n) + n \overset{(6)}{=} \Psi_{S(k)}(n)$$

が得られるので，数学的帰納法により，すべての n，$m \in \mathbb{N}_0$ に対して $\Psi_n(m) = \Psi_m(n)$ が成り立つ．■