解析学概論　解答例

2018.01.22

■　$\mathbb{N}_0^2$ における二項関係 $\sim$ を

$$(n_1, m_1) \sim (n_2, m_2) \quad \Longleftrightarrow \quad n_1 + m_2 = n_2 + m_1$$

により定義するとき，二項関係 $\sim$ は $\mathbb{N}_0^2$ における同値関係である（証明しなくてもよい）．(n, m) を代表元とする同値関係 $\sim$ に関する同値類を $[(n, m)]$ とし，$\mathbb{Z} = \mathbb{N}_0^2/\sim$ における乗法 $\otimes$ を

$$[(n_1, m_1)] \otimes [(n_2, m_2)] = [(n_1 \cdot n_2 + m_1 \cdot m_2, n_1 \cdot m_2 + n_2 \cdot m_1)]$$

により定義するとき，

$$[(n_1, m_1)] \otimes [(n_2, m_2)] = [(0, 0)] \quad \Longleftrightarrow \quad [(n_1, m_1)] = [(0, 0)] \text{ または } [(n_2, m_2)] = [(0, 0)]$$

が成り立つことを示せ．ただし，加法 $+$ および乗法 $\cdot$ は $\mathbb{N}_0$ におけるものとする．

（解）　（$\Longleftarrow$）：乗法 $\otimes$ の定義より

$$\begin{aligned}
[(0, 0)] \otimes [(n_2, m_2)] =& [(0 \cdot n_2 + 0 \cdot m_2, 0 \cdot m_2 + n_2 \cdot 0)] = [(0, 0)], \\
[(n_1, m_1)] \otimes [(0, 0)] =& [(n_1 \cdot 0 + m_1 \cdot 0, n_1 \cdot 0 + 0 \cdot m_1)] = [(0, 0)]
\end{aligned}$$

が得られる．

（$\Longrightarrow$）：$[(n_1, m_1)] \otimes [(n_2, m_2)] = [(0, 0)]$ より

$$n_1 \cdot n_2 + m_1 \cdot m_2 = n_1 \cdot m_2 + n_2 \cdot m_1$$

が成り立つ．$\mathbb{N}_0$ における順序関係 $\leq$ は全順序であるから，(a) $n_1 > m_1$，(b) $n_1 = m_1$，(c) $n_1 < m_1$ の何れか一つが成り立つ．(b) の場合には，同値関係 $\sim$ の定義より $[(n_1, m_1)] = [(0, 0)]$ が成り立つ．(a) の場合を考える．$n_1 = m_1 + k$ となる $k \in S(\mathbb{N}_0)$ が存在し，

$$n_2 \cdot m_1 + m_1 \cdot m_2 + k \cdot n_2 = n_1 \cdot n_2 + m_1 \cdot m_2 = n_1 \cdot m_2 + n_2 \cdot m_1 = n_2 \cdot m_1 + m_1 \cdot m_2 + k \cdot m_2$$

と簡約法則により $k \cdot n_2 = k \cdot m_2$ が成り立つ．$n_2 > m_2$ のときには，$n_2 = m_2 + k$ となる $\ell \in S(\mathbb{N}_0)$ が存在するので，$k \cdot \ell > 0$[*1] より

$$k \cdot m_2 = k \cdot n_2 = k \cdot m_2 + k \cdot \ell > k \cdot m_2$$

となり矛盾である．$\mathbb{N}_0$ における順序関係 $\leq$ は全順序であるから，$n_2 \leq m_2$ が成り立つ．同様に，$n_2 \geq m_2$ も示せるので，$n_2 = m_2$，つまり，$[(n_2, m_2)] = [(0, 0)]$ である．(c) の場合にも，(a) と同様に $[(n_2, m_2)] = [(0, 0)]$ であることが示せる．■

[*1] $\ell \in S(\mathbb{N}_0)$ より，ある $\hat{\ell} \in \mathbb{N}_0$ が取れて $S(\hat{\ell}) = \ell$ が成り立つので，

$$k \cdot \ell = \Psi_k(\ell) = \Psi_k(S(\hat{\ell})) = \Psi_k(\hat{\ell}) + k \geq k > 0$$

が得られる．