解析学概論　解答例

2018.01.29

■　$X = \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ における二項関係 $\approx$ を

$$(q_1, p_1) \approx (q_2, p_2) \quad \Longleftrightarrow \quad q_1 \cdot p_2 = q_2 \cdot p_1$$

により定義するとき，二項関係 $\approx$ は X における同値関係であること示せ．ただし，$\mathbb{N} = S(\mathbb{N}_0)$ である．また，$\mathbb{N}$ は $\mathbb{Z}$ の部分集合とみなし，演算 $\cdot$ は $\mathbb{Z}$ における乗法である．

（解） (i) $q \cdot p = q \cdot p$ と定義より $(q, p) \approx (q, p)$ が成り立つ．(ii) $(q_1, p_1) \approx (q_2, p_2)$ とすると，定義より $q_1 \cdot p_2 = q_2 \cdot p_1$ が成り立ち，左辺と右辺を入れ替えると，$q_2 \cdot p_1 = q_1 \cdot p_2$ が得られる．定義より $(q_2, p_2) \approx (q_1, p_1)$ となる．(iii) $(q_1, p_1) \approx (q_2, p_2)$ かつ $(q_2, p_2) \approx (q_3, p_3)$ とすると，定義より $q_1 \cdot p_2 = q_2 \cdot p_1$ かつ $q_2 \cdot p_3 = q_3 \cdot p_2$ が成り立つ．

$$(q_1 \cdot p_3) \cdot p_2 = (q_1 \cdot p_2) \cdot p_3 = (q_2 \cdot p_1) \cdot p_3 = (q_2 \cdot p_3) \cdot p_1 = (q_3 \cdot p_2) \cdot p_1 = (q_3 \cdot p_1) \cdot p_2$$

と簡約法則[*1]により $q_1 \cdot p_3 = q_3 \cdot p_1$ が得られ，定義より $(q_1, p_1) \approx (q_3, p_3)$ が成り立つ．■

[*1] **（整数の簡約法則 $(p \neq 0 \wedge (q \cdot p = r \cdot p)) \Longrightarrow q = r$ の証明）**　r の加法の逆元を s とする．$s \cdot p$ を両辺に加えて，分配法則を用いると，

$$(q + s) \cdot p = q \cdot p + s \cdot p = r \cdot p + s \cdot p = (q + s) \cdot p = 0 \cdot p = 0$$

が成り立つ．$\mathbb{Z}$ は整域であり，$p \neq 0$ であるから，$q + s = 0$ である．両辺に r を加えると

$$r = 0 + r = q + (s + r) = q + 0 = q$$

が成り立つ．■