解析学 II　解答例

2018.04.23

■　線形空間 V における線形写像 $A: V \to V$ の核を $\operatorname{Ker} A$ と表す．このとき，ある自然数 k が存在して

$$\operatorname{Ker} A^{\ell} \begin{cases} \subsetneqq \operatorname{Ker} A^{\ell+1} & (\ell < k) \\ = \operatorname{Ker} A^{\ell+1} & (\ell \geq k) \end{cases}$$

が成り立つことを示せ．

（解） 任意の $\ell \in \mathbb{N}$ に対して，$\mathbf{x} \in \operatorname{Ker} A^{\ell}$ ならば，$A^{\ell}\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ より $A^{\ell+1}\,\mathbf{x} = A\,(A^{\ell}\,\mathbf{x}) = A\,\mathbf{0} = \mathbf{0}$ であるから，$\mathbf{x} \in \operatorname{Ker} A^{\ell+1}$ となる，つまり，$\operatorname{Ker} A^{\ell} \subset \operatorname{Ker} A^{\ell+1}$ である．等式 $\operatorname{Ker} A^{\ell} = \operatorname{Ker} A^{\ell+1}$ が成り立つ最小の自然数を k とする．このとき，すべての自然数 $\ell < k$ に対して $\operatorname{Ker} A^{\ell} \subsetneqq \operatorname{Ker} A^{\ell+1}$ である．また，$\operatorname{Ker} A^{\ell} = \operatorname{Ker} A^{\ell+1}$ （$k \leq \ell \in \mathbb{N}$）と仮定する．任意に $\mathbf{x} \in \operatorname{Ker} A^{\ell+2}$ をとると，$\mathbf{0} = A^{\ell+2}\,\mathbf{x} = A^{\ell+1}\,(A\,\mathbf{x})$ より $A\,\mathbf{x} \in \operatorname{Ker} A^{\ell+1}$ であり，仮定より $A\,\mathbf{x} \in \operatorname{Ker} A^{\ell}$ となるので，$\mathbf{0} = A^{\ell}\,(A\,\mathbf{x}) = A^{\ell+1}\,\mathbf{x}$ が得られ，$\mathbf{x} \in \operatorname{Ker} A^{\ell+1}$ である．したがって，$\operatorname{Ker} A^{\ell+2} \subset \operatorname{Ker} A^{\ell+1}$ となり，$\operatorname{Ker} A^{\ell+1} = \operatorname{Ker} A^{\ell+2}$ が成り立つ．数学的帰納法により，すべての自然数 $\ell \geq k$ に対して $\operatorname{Ker} A^{\ell} = \operatorname{Ker} A^{\ell+1}$ である．■