

解析学 II 解答例

2018.05.07

■ 実係数 2×2 行列 A の固有値を λ_1, λ_2 , 対応する固有ベクトルをそれぞれ $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ とし, 2×2 行列 P を $P = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ とおく. $\lambda_1 \neq \lambda_2$ のとき, $P^{-1}AP$ を簡単にせよ. ただし, P が逆行列をもつことは証明しなくてもよい.

(解) 仮定より $A\mathbf{v}_1 = \lambda_1\mathbf{v}_1$, $A\mathbf{v}_2 = \lambda_2\mathbf{v}_2$ が成り立つので,

$$AP = A(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = (A\mathbf{v}_1, A\mathbf{v}_2) = (\lambda_1\mathbf{v}_1, \lambda_2\mathbf{v}_2) = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

となり,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

が得られる. ■