

解析学 II 解答例

2018.05.14

■ 行列 A , B , $\mathbf{e}$ をそれぞれ

$$A = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} \cos(\pi/4) & -\sin(\pi/4) \\ \sin(\pi/4) & \cos(\pi/4) \end{pmatrix}, \quad B = E + A + A^2 + A^3 + \cdots + A^n + \cdots, \quad \mathbf{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

により定義するとき, $B\mathbf{e}$ を求めよ.

(解) B の定義より

$$(E - A)B = B - AB = (E + A + A^2 + A^3 + \cdots) - (A + A^2 + A^3 + A^4 + \cdots) = E$$

となるので, $B = (E - A)^{-1}$ が成り立つ. したがって,

$$\begin{aligned} B\mathbf{e} &= (E - A)^{-1}\mathbf{e} = \begin{pmatrix} (3 - \sqrt{2})/3 & \sqrt{2}/3 \\ -\sqrt{2}/3 & (3 - \sqrt{2})/3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{9}{(3 - \sqrt{2})^2 + 2} \begin{pmatrix} (3 - \sqrt{2})/3 & -\sqrt{2}/3 \\ \sqrt{2}/3 & (3 - \sqrt{2})/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{3}{13 - 6\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 3 - \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である. ■