解析学 II　解答例

2018.05.21

■　漸化式

$$a_1 = p, \qquad a_2 = q, \qquad a_{n+2} = 2\,a_{n+1} - a_n \quad (n \in \mathbb{N})$$

により定められる数列 $\{\,a_n\,\}$ の一般項を求めるために，

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}; \qquad b_n = a_{n+1}, \qquad \mathbf{x}_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}, \qquad n \in \mathbb{N}$$

とおくと，上記の漸化式は $\mathbf{x}_{n+1} = A\,\mathbf{x}_n$ と表せ，$\mathbf{x}_n = A^{n-1}\,\mathbf{x}_0$ により一般項 a_n が求まる．このとき，一般項 a_n を実際に求めよ．

（解）　方程式 $\det(A - \lambda E) = (\lambda - 1)^2 = 0$ の解が固有値であるから，A の固有値は $\lambda = 1$ である．$A - 1 \cdot E \neq O$ であるから，$\dim \mathrm{Ker}(A - E) = 1$ である．連立方程式 $(A - E)\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の非自明な解として $\mathbf{v}_1 = (1, 1)^T$ があり，連立方程式 $(A - E)\,\mathbf{x} = \mathbf{v}_1$ の解として $\mathbf{v}_2 = (1, 2)^T$ がある．ここで，$P = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ とおくと，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

であるから，

$$A^n = P \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - n & n \\ -n & n + 1 \end{pmatrix}$$

となる．したがって，一般項 a_n は $A^{n-1}\,\mathbf{x}_1$ の第 1 要素であるから，

$$a_n = (2 - n)\,p + (n - 1)\,q$$

となる．■