解析学 II　解答例

2018.06.11

■　$0 < \gamma < 1$ とする．数列 $\{\, a_n \,\}$ を

$$a_1 = \frac{1}{2}; \qquad a_{n+1} = \gamma\, a_n\,(1 - a_n), \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

より定義するとき，$\{\, a_n \,\}$ は下に有界な単調減少数列であることを示せ．

(解)　明らかに $0 < a_1 < 1$ である．$0 < a_n < 1$ が成り立つと仮定すると，

$$0 < a_{n+1} = \gamma\, a_n\,(1 - a_n) = -\gamma\,\left(a_n - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{\gamma}{4} \le \frac{\gamma}{4} < \frac{1}{4} < 1$$

となる．数学的帰納法により，すべての自然数 n に対して $0 < a_n < 1$ が成り立つ．また，すべての自然数 n に対して

$$a_{n+1} - a_n = a_n\,(\gamma - 1 - \gamma\, a_n) \le 0$$

であるから，$\{\, a_n \,\}$ は下に有界な単調減少数列である．■