解析学概論　解答例

2018.10.15

■ $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ における命題関数

$$P(x,y) : |\,x\,|^2 + |\,y\,|^2 \leq 1, \qquad Q(x,y) : |\,x\,|^3 + |\,y\,|^3 \leq 1,$$
$$R(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1, \qquad S(x,y) : x^3 + y^3 \leq 1$$

について，次の限定命題が真であれば証明を，偽であれば反例を示せ．

(1) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ P(x,y) \Longleftrightarrow R(x,y)$

(2) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ P(x,y) \Longrightarrow Q(x,y)$

(3) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ S(x,y) \Longrightarrow Q(x,y)$

(4) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ Q(x,y) \Longrightarrow S(x,y)$

(解) (1) すべての $z \in \mathbb{R}$ に対して $z^2 = |\,z\,|^2$ であるから，任意の $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ に対して $x^2 + y^2 = |\,x\,|^2 + |\,y\,|^2$ となるので，与えられた命題は成り立つ．

(2) 仮定より $|\,x\,| \leq 1$，$|\,y\,| \leq 1$ であるから，

$$|\,x\,|^3 + |\,y\,|^3 = |\,x\,|^2 \cdot |\,x\,| + |\,y\,|^2 \cdot |\,y\,| \leq |\,x\,|^2 \cdot 1 + |\,y\,|^2 \cdot 1 = |\,x\,|^2 + |\,y\,|^2 \leq 1$$

となり，与えられた命題は成り立つ．

(3) $x = 1$，$y = -1$ とおくと，$x^3 + y^3 = 1^3 + (-1)^3 = 0 \leq 1$ であるが，$|\,x\,|^3 + |\,y\,|^3 = 1^3 + 1^3 = 2 > 1$ となり，与えられた命題は成り立たない．

(4) すべての $z \in \mathbb{R}$ に対して $z \leq |\,z\,|$ であり，関数 $f(z) = z^3$ は単調増加関数であるから，

$$x^3 + y^3 \leq |\,x\,|^3 + |\,y\,|^3 \leq 1$$

となり，与えられた命題は成り立つ．■