解析学概論　解答例

2018.10.29

■　次の条件をみたす写像 $f : X \to Y$ の例を示せ．

(1) すべての X の部分集合 A_1，A_2 に対して $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$ が成り立つ．

(2) すべての X の部分集合 A に対して $f^{-1}(f(A)) = A$ が成り立つ．

(3) すべての Y の部分集合 B に対して $f(f^{-1}(B)) = B$ が成り立つ．

（解） 条件 (4) を「f は単射である」，条件 (5) を「f は全射である」とする．

(1) $\Longrightarrow$ (4) : $x_1 \neq x_2$ をみたす x_1，$x_2 \in X$ を任意に取り，$A_1 = \{\, x_1 \,\}$，$A_2 = \{\, x_2 \,\}$ とおく．$x_1 \neq x_2$ より $A_1 \cap A_2 = \varnothing$ であるから，

$$\varnothing = f(\varnothing) = f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2) = \{\, f(x_1) \,\} \cap \{\, f(x_2) \,\}$$

より $f(x_1) \neq f(x_2)$ である．したがって，f は単射である．

(4) $\Longrightarrow$ (1) : 一般に $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$ が成り立つので，$f(A_1 \cap A_2) \supset f(A_1) \cap f(A_2)$ を示せば良い．$y \in f(A_1) \cap f(A_2)$ を任意に取ると，$j = 1$，2 に対して，$y \in f(A_j)$ より $f(x_j) = y$ をみたす $x_j \in A_j$ が存在する．f が単射であることと，$f(x_1) = y = f(x_2)$ であることから，$x_1 = x_2 \in A_1 \cap A_2$ となり，$y = f(x_1) \in f(A_1 \cap A_2)$ が得られる．したがって，$f(A_1) \cap f(A_2) \subset f(A_1 \cap A_2)$ である．

(2) $\Longrightarrow$ (4) : $f(x_1) = f(x_2)$ をみたす x_1，$x_2 \in X$ を任意に取り，$A_1 = \{\, x_1 \,\}$，$A_2 = \{\, x_2 \,\}$ とおくと，$f(A_1) = f(A_2)$ より

$$\{\, x_1 \,\} = A_1 = f^{-1}(f(A_1)) = f^{-1}(f(A_2)) = A_2 = \{\, x_2 \,\}$$

より $x_1 = x_2$ である．したがって，f は単射である．

(4) $\Longrightarrow$ (2) : 一般に $f^{-1}(f(A)) \supset A$ が成り立つので，$f^{-1}(f(A)) \subset A$ を示せば良い．$x \in f^{-1}(f(A))$ を任意に取ると，$f(x) \in f(A)$ より $f(x) = f(z)$ をみたす $z \in A$ が存在する．f が単射であるから，$x = z \in A$ が得られる．したがって，$f^{-1}(f(A)) \subset A$ が成り立つ．

(3) $\Longrightarrow$ (5) : $f^{-1}(Y) = X$ より $Y = f(f^{-1}(Y)) = f(X)$ となるので，f は全射である．

(5) $\Longrightarrow$ (3) : 一般に $f(f^{-1}(B)) \subset B$ が成り立つので，$f(f^{-1}(B)) \supset B$ を示せば良い．任意の $y \in B$ に対して，f は全射であるから，$f(x) = y$ をみたす $x \in X$ が存在する．$f(x) = y \in B$ より $x \in f^{-1}(B)$ であり，$y = f(x) \in f(f^{-1}(B))$ となる．したがって，$B \subset f(f^{-1}(B))$ が成り立つ．

以上から，条件 (1)，(2)，(4) は互いに同値であり，条件 (3)，(5) は互いに同値である．■