解析学概論　解答例

2018.11.19

■　次の問いに答えよ．

(1) 複素数の範囲で方程式 $\overline{z} = \dfrac{2\,z+3}{z}$ の解をすべて求めよ．

(2) 複素数の範囲で $\sin z$，$\cos z$ は $\sin z = \dfrac{e^{i\,z} - e^{-i\,z}}{2\,i}$，$\cos z = \dfrac{e^{i\,z} + e^{-i\,z}}{2}$ により定義される．このとき，複素数の範囲で方程式 $\sin z = 0$ の解をすべて求めよ．

（解） (1) $z = (|\,z\,|^2 - 3)/2 \in \mathbb{R}$ より，与えられた方程式の解はすべて実数であるから，

$$z = \overline{z} = \frac{2\,z+3}{z}, \qquad \text{つまり，} \quad 0 = z^2 - 2\,z - 3 = (z-3)\,(x+1)$$

より求める解は $z = -1$ および $z = 3$ である．(2) 実数 z に対して $\sin z$ および $\cos z$ は実数であり，実数 a，b に対して

$$\begin{aligned}\sin(a+b\,i) =& \frac{e^{a\,i-b} - e^{-a\,i+b}}{2\,i} = \frac{\left(e^{a\,i} - e^{-a\,i}\right)\,\left(e^{b} + e^{-b}\right) - \left(e^{a\,i} + e^{-a\,i}\right)\,\left(e^{b} - e^{-b}\right)}{4\,i} \\ =& \frac{e^{b} + e^{-b}}{2}\,\sin a + i\,\frac{e^{b} - e^{-b}}{2}\,\cos a\end{aligned}$$

であることに注意したい．(a) $b \neq 0$ の場合，$e^{b} \neq e^{-b}$ より

$$|\sin(a+b\,i)\,|^2 = \left(\frac{e^{b} + e^{-b}}{2}\right)^2 \sin^2 a + \left(\frac{e^{b} - e^{-b}}{2}\right)^2 \cos^2 a = \sin^2 a + \left(\frac{e^{b} - e^{-b}}{2}\right)^2 > 0$$

となるので，方程式 $\sin(a+b\,i) = 0$ をみたす実数の組 (a,b) は存在しない．(b) $b = 0$ の場合，方程式 $\sin a = 0$ の解は $a = n\,\pi$　（$n \in \mathbb{Z}$）である．したがって，複素数の範囲で方程式 $\sin z = 0$ の解は $z = n\,\pi$（$n \in \mathbb{Z}$）である．■