

■ 集合 $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ における二項関係 \sim を

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \stackrel{\text{定義}}{\iff} \exists r > 0 : x_1 = r x_2 \text{ かつ } y_1 = r y_2$$

により定義するとき、二項関係 \sim は X における同値関係であるかどうかを調べよ。

(解) (1) $x = 1 \cdot x$, $y = 1 \cdot y$ であるから、 $r = 1$ と取ることにより $(x, y) \sim (x, y)$ が成り立つ。(2) $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ とする。定義より、ある $r > 0$ が取れて $x_1 = r x_2$ かつ $y_1 = r y_2$ が成り立つ。 $\hat{r} = 1/r$ とおくと、

$$\hat{r} > 0, \quad x_2 = \hat{r} x_1, \quad y_2 = \hat{r} y_1$$

が得られるので、 $(x_2, y_2) \sim (x_1, y_1)$ である。(3) $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ かつ $(x_2, y_2) \sim (x_3, y_3)$ とする。定義より、ある $r_1 > 0$, $r_2 > 0$ が取れて、

$$x_1 = r_1 x_2, \quad y_1 = r_1 y_2, \quad x_2 = r_2 x_3, \quad y_2 = r_2 y_3$$

が成り立つ。 $r = r_1 r_2$ とおくと、

$$r > 0, \quad x_1 = r_1 (r_2 x_3) = r x_3, \quad y_1 = r_1 (r_2 y_3) = r y_3$$

が得られるので、 $(x_1, y_1) \sim (x_3, y_3)$ である。以上から、二項関係 \sim は X における同値関係である。 ■