解析学概論　解答例

2018.12.03

■　次の問いに答えよ．

(1) $X = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ における二項関係 $\overset{R}{\approx}$ を

$$(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_1) \overset{R}{\approx} (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_2) \quad \overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow} \quad \boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{b}_2 - \boldsymbol{a}_2$$

により定める．ただし，$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{b}_1$，$\boldsymbol{b}_2 \in \mathbb{R}^2$ であり，任意の $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)$，$\boldsymbol{b} = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$ に対して $\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$ とする．このとき，二項関係 $\overset{R}{\approx}$ は X における同値関係であるかどうか調べよ．

(2) 集合 $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{ (0,0) \}$ における二項関係 $\sim$ を

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \quad \overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow} \quad \exists r > 0 : x_1 = r\, x_2 \text{ かつ } y_1 = r\, y_2$$

により定義すると，二項関係 $\sim$ は X における同値関係である（証明は省略してよい）．各 $(a,b) \in X$ に対して (a,b) を代表元とする同値関係 $\sim$ に関する同値類を $C((a,b))$ と表し，商集合 $X/\!\sim$ における演算 $\boxplus$ を

$$C((a_1, b_1)) \boxplus C((a_2, b_2)) \overset{\text{定義}}{=} C((a_1\, a_2 - b_1\, b_2, a_1\, b_2 + a_2\, b_1))$$

により定義する．このとき，演算 $\boxplus$ は代表元の取り方に依存せずにうまく定義されている（well-defined）ことを示せ．

（解） (1) (i) 任意の $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^2$ に対して $\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$ であるから，$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \in X$ に対して $\boldsymbol{x} \overset{R}{\approx} \boldsymbol{x}$ が成り立つ．(ii) $\boldsymbol{x}_1 = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_1)$，$\boldsymbol{x}_2 = (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_2) \in X$ に対して $\boldsymbol{x}_1 \overset{R}{\approx} \boldsymbol{x}_2$ とする．二項関係 $\overset{R}{\approx}$ の定義より $\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{b}_2 - \boldsymbol{a}_2$ が成り立ち，左辺と右辺を入れ替えると $\boldsymbol{b}_2 - \boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{a}_1$ となる．二項関係 $\overset{R}{\approx}$ の定義より $\boldsymbol{x}_2 \overset{R}{\approx} \boldsymbol{x}_1$ である．(iii) $\boldsymbol{x}_1 = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_1)$，$\boldsymbol{x}_2 = (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_2)$，$\boldsymbol{x}_3 = (\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{b}_3) \in X$ に対して $\boldsymbol{x}_1 \overset{R}{\approx} \boldsymbol{x}_2$，$\boldsymbol{x}_2 \overset{R}{\approx} \boldsymbol{x}_3$ とする．二項関係 $\overset{R}{\approx}$ の定義より $\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{b}_2 - \boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{b}_2 - \boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{b}_3 - \boldsymbol{a}_3$ が成り立ち，$\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{b}_3 - \boldsymbol{a}_3$ となる．二項関係 $\overset{R}{\approx}$ の定義より $\boldsymbol{x}_1 \overset{R}{\approx} \boldsymbol{x}_3$ である．以上から，二項関係 $\overset{R}{\approx}$ は X における同値関係である．

(2) $C((a_1, b_1)) = C((c_1, d_1))$ かつ $C((a_2, b_2)) = C((c_2, d_2))$ とする．$(a_1, b_1) \sim (c_1, d_1)$ かつ $(a_2, b_2) \sim (c_2, d_2)$ より，ある $r_1 > 0$，$r_2 > 0$ が取れて $a_1 = r_1\, c_1$，$b_1 = r_1\, d_1$，$a_2 = r_2\, c_2$，$b_2 = r_2 d_2$ が成り立つので，

$$a_1\, a_2 - b_1\, b_2 = r_1\, r_2\, (c_1\, c_2 - d_1\, d_2), \qquad a_1\, b_2 + a_2\, b_1 = r_1\, r_2\, (c_1\, d_2 + c_2\, d_1)$$

が得られる．$r_1\, r_2 > 0$ と同値関係 $\sim$ の定義より

$$(a_1\, a_2 - b_1\, b_2, a_1\, b_2 + a_2\, b_1) \sim (c_1\, c_2 - d_1\, d_2, c_1\, d_2 + c_2\, d_1)$$

であるから，

$$\begin{aligned} C((a_1, b_1)) \boxplus C((a_2, b_2)) &\overset{\text{定義}}{=} C((a_1\, a_2 - b_1\, b_2, a_1\, b_2 + a_2\, b_1)) \\ &= C((c_1\, c_2 - d_1\, d_2, c_1\, d_2 + c_2\, d_1)) \overset{\text{定義}}{=} C((c_1, d_1)) \boxplus C((c_2, d_2)) \end{aligned}$$

となり，演算 $\boxplus$ は代表元の取り方に依存せずにうまく定義されている．■