解析学概論　解答例

2018.12.10

■　次の問いに答えよ．

(1) $\sin\{(n+1)x\}+\sin\{(n-1)x\}$ を簡単にせよ．

(2) すべての自然数 $n\in\mathbb{N}$ に対して，$f_n(x)=\dfrac{\sin\{(n+1)x\}}{\sin x}$ は z に関する n 次多項式 $P_n(z)$ を用いて

$$f_n(x)=P_n(\cos x) \tag{E}$$

と表されることを示せ．

（解） (1) 三角関数の加法定理より

$$\begin{aligned}\sin\{(n+1)x\}+\sin\{(n-1)x\}=&(\sin nx\,\cos x+\cos nx\,\sin x)\\&+(\sin nx\,\cos x-\cos nx\,\sin x)=2\,\sin nx\,\cos x\end{aligned}$$

となる．(2) n を $(n+1)$ として，前問題 (1) で得られた関係式の両辺を $\sin x$ で割ることにより，すべての $n\in\mathbb{N}$ に対して

$$f_{n+2}(x)=2\,f_{n+1}(x)\,\cos x-f_n(x) \tag{F}$$

が成り立つ．自然数 n に対して，命題 $(\mathrm{Q})_n$ を

z に関する n 次多項式 $P_n(z)$，$(n+1)$ 次多項式 $P_{n+1}(z)$ を用いて

$$f_n(x)=P_n(\cos x),\qquad f_{n+1}(x)=P_{n+1}(\cos x)$$

と表される，

とする．(i) 三角関数の加法定理より

$$f_1(x)=\frac{2\,\sin x\,\cos x}{\sin x}=2\,\cos x,\qquad f_2(x)=\frac{2\,\sin 2x\,\cos x-\sin x}{\sin x}=4\,\cos^2 x-1$$

となるので，$P_1(z)=2\,z$，$P_2(z)=4\,z^2-1$ とおくと，命題 $(\mathrm{Q})_1$ が成り立つ．(ii) 命題 $(\mathrm{Q})_\ell$ が成り立つと仮定する．つまり，z に関する ℓ 次多項式 $P_\ell(z)$，$(\ell+1)$ 次多項式 $P_{\ell+1}(z)$ を用いて

$$f_\ell(x)=P_\ell(\cos x),\qquad f_{\ell+1}(x)=P_{\ell+1}(\cos x)$$

と表される．関係式 (F) より

$$f_{\ell+2}(x)=2\,f_{\ell+1}(x)\,\cos x-f_\ell(x)=2\,P_{\ell+1}(\cos x)\,\cos x-P_\ell(\cos x)$$

と表されるので，$P_{\ell+2}(z)=2\,P_{\ell+1}(z)\,z-P_\ell(z)$ とおくと，$P_{\ell+2}(z)$ は z に関する $(\ell+2)$ 次多項式であり，$f_{\ell+2}(x)=P_{\ell+2}(\cos x)$ と表せる．したがって，命題 $(\mathrm{Q})_{\ell+1}$ が成り立つ．数学的帰納法により，すべての自然数 n に対して，命題 $(\mathrm{Q})_n$ が成り立つ，つまり，z に関する n 次多項式 $P_n(z)$ を用いて $f_n(x)=P_n(\cos x)$ と表される．■