解析学概論　解答例

2018.12.17

■　写像 $\Phi_n : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ （$n \in \mathbb{N}_0$）を次のように帰納的に定義する．

(1) $\Phi_n(0) = n$

(2) $\Phi_n(S(m)) = S(\Phi_n(m)) \qquad (m \in \mathbb{N}_0)$

ここで，$S(m)$ は m の後継者である．このとき，すべての $n \in \mathbb{N}_0$ に対して $\Phi_{\Phi_n(m)}(k) = \Phi_n(\Phi_m(k))$ が成り立つことを示せ．

（解） 示すべき関係式を (E) で表し，n と m を任意に取り，k に関する数学的帰納法で関係式 (E) を示す．

(I) $k = 0$ のとき，

$$（左辺）= \Phi_{\Phi_n(m)}(0) \overset{定義\,(1)}{=} \Phi_n(m) \overset{定義\,(1)}{=} \Phi_n(\Phi_m(0)) = （右辺）$$

より関係式 (E) が成り立つ．

(II) $k = \ell$ のとき関係式 (E) が成り立つと仮定すると，

$$\begin{aligned} \Phi_{\Phi_n(m)}(S(\ell)) &\overset{定義\,(2)}{=} S(\Phi_{\Phi_n(m)}(\ell)) \overset{仮定}{=} S(\Phi_n(\Phi_m(\ell))) \\ &\overset{定義\,(2)}{=} \Phi_n(S(\Phi_m(\ell))) \overset{定義\,(2)}{=} \Phi_n(\Phi_m(S(\ell))) \end{aligned}$$

より $k = S(\ell)$ のときも関係式 (E) が成り立つ．

数学的帰納法により，すべての n，m，$k \in \mathbb{N}_0$ に対して関係式 (E) が成り立つ．■