解析学概論　解答例

2019.01.07

■　写像 $\Psi_n : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ （$n \in \mathbb{N}_0$）を次のように帰納的に定義する．

(1) $\Psi_n(0) = 0$

(2) $\Psi_n(S(m)) = \Psi_n(m) + n \qquad (m \in \mathbb{N}_0)$

ここで，$S(m)$ は m の後継者である．このとき，すべての n，m，$k \in \mathbb{N}_0$ に対して $\Psi_{\Psi_n(m)}(k) = \Psi_n(\Psi_m(k))$ が成り立つことを示せ．必要があれば，分配法則 $\Psi_n(m+k) = \Psi_n(m) + \Psi_n(k)$ （証明不要）を用いても良い．

（解） 示すべき関係式を (E) とする．以下では，n，$m \in \mathbb{N}_0$ を任意に取り固定し，$k \in \mathbb{N}_0$ に関する数学的帰納法で関係式 (E) を示す．

(I) $n = 0$ のとき，

$$(\text{左辺}) = \Psi_{\Psi_n(m)}(0) \overset{\text{定義 }(1)}{=} 0, \qquad (\text{右辺}) = \Psi_n(\Psi_m(0)) \overset{\text{定義 }(1)}{=} \Psi_n(0) \overset{\text{定義 }(1)}{=} 0$$

より示すべき関係式 (E) が成り立つ．

(II) $k = \ell$ のとき関係式 (E) が成り立つと仮定すると，

$$\begin{aligned}\Psi_{\Psi_n(m)}(S(\ell)) &\overset{\text{定義 }(2)}{=} \Psi_{\Psi_n(m)}(\ell) + \Psi_n(m) \overset{\text{仮定}}{=} \Psi_n(\Psi_m(\ell)) + \Psi_n(m) \\ &\overset{\text{分配法則}}{=} \Psi_n(\Psi_m(\ell) + m) \overset{\text{定義 }(2)}{=} \Psi_n(\Psi_m(S(\ell)))\end{aligned}$$

となり，$k = S(\ell)$ のときも関係式 (E) が成り立つ．

数学的帰納法により，すべての n，m，$k \in \mathbb{N}_0$ に対して関係式 (E) が成り立つ．■