

■ $X = \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ における二項関係 $\overset{R}{\sim}$ を

$$(n_1, m_1) \overset{R}{\sim} (n_2, m_2) \iff n_1 + m_2 = n_2 + m_1$$

により定義するとき、二項関係 $\overset{R}{\sim}$ は X における同値関係であることを示せ.

(解) (1) $n + m = n + m$ より $(n, m) \overset{R}{\sim} (n, m)$ である. (2) $(n_1, m_1) \overset{R}{\sim} (n_2, m_2)$ であると仮定する. 二項関係 $\overset{R}{\sim}$ の定義より $n_1 + m_2 = n_2 + m_1$ であるから、左辺と右辺を入れ替えると、 $n_2 + m_1 = n_1 + m_2$ となり、二項関係 $\overset{R}{\sim}$ の定義より $(n_2, m_2) \overset{R}{\sim} (n_1, m_1)$ が得られる. (3) $(n_1, m_1) \overset{R}{\sim} (n_2, m_2)$ かつ $(n_2, m_2) \overset{R}{\sim} (n_3, m_3)$ であると仮定する. 二項関係 $\overset{R}{\sim}$ の定義より $n_1 + m_2 = n_2 + m_1$, $n_2 + m_3 = n_3 + m_2$ であるから、

$$\begin{aligned} (n_1 + m_3) + m_2 &= (n_1 + m_2) + m_3 = (n_2 + m_1) + m_3 \\ &= (n_2 + m_3) + m_1 = (n_3 + m_2) + m_1 = (n_3 + m_1) + m_2 \end{aligned}$$

が成り立ち、簡約法則により $n_1 + m_3 = n_3 + m_1$ が得られる. 二項関係 $\overset{R}{\sim}$ の定義より $(n_1, m_1) \overset{R}{\sim} (n_3, m_3)$ となる. 以上から、二項関係 $\overset{R}{\sim}$ は X における同値関係である. ■