解析学概論　解答例

2019.02.04

■　$\mathbb{Z} = \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 / \overset{R}{\sim}$ における二項関係 $\overset{R}{\leq}$ を

$$[(n_1, m_1)] \overset{R}{\leq} [(n_2, m_2)] \quad \overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow} \quad n_1 + m_2 \leq n_2 + m_1$$

により定義するとき，二項関係 $\overset{R}{\leq}$ は代表元の取り方に依らずにうまく定義できていることを示せ．ここで，二項関係 $\leq$ は自然数 $\mathbb{N}_0$ における順序関係とする．

（解）　$[(n, m)] = [(\hat{n}, \hat{m})]$，$[(k, \ell)] = [(\hat{k}, \hat{\ell})]$，$[(n, m)] \overset{R}{\leq} [(k, \ell)]$ が成り立つとすると，二項関係 $\overset{R}{\sim}$ および $\overset{R}{\leq}$ の定義より，

$$n + \hat{m} = \hat{n} + m, \qquad k + \hat{\ell} = \hat{k} + \ell, \qquad n + \ell \leq k + m$$

が成り立つので，簡約法則と

$$\begin{aligned}(k + m) + (\hat{k} + \hat{m}) \geq& (n + \ell) + (\hat{k} + \hat{m}) = (n + \hat{m}) + (\hat{k} + \ell) \\ =& (\hat{n} + m) + (k + \hat{\ell}) = (k + m) + (\hat{n} + \hat{\ell})\end{aligned}$$

より $\hat{n} + \hat{\ell} \leq \hat{k} + \hat{m}$ が得られ，$[(\hat{n}, \hat{m})] \leq [(\hat{k}, \hat{\ell})]$ となる．したがって，二項関係 $\overset{R}{\leq}$ は代表元の取り方に依らずにうまく定義できている．■