解析学２　解答例

2018.04.23

■　格子点の集合 $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ に対して次のように番号を付ける．

$$
\begin{array}{lllll}
(0,0) \mapsto 1, & (1,0) \mapsto 2, & (0,1) \mapsto 3, & (2,0) \mapsto 4, & (1,1) \mapsto 5, \\
(0,2) \mapsto 6, & (3,0) \mapsto 7, & (2,1) \mapsto 8, & (1,2) \mapsto 9, & (0,3) \mapsto 10, \\
(4,0) \mapsto 11, & (3,1) \mapsto 12, & (2,2) \mapsto 13, & (1,3) \mapsto 14, & \cdots\cdots
\end{array}
$$

このとき，格子点 $(p,q) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ に対応する番号 $f(p,q) \in \mathbb{N}$ を求めよ．また，写像 $f(p,q)$ は全単射であるかどうかを調べよ．

(解)　表現： $x+y \leq p+q-1$ をみたす格子点 $(x,y) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ の個数は

$$1+2+3+\cdots+(p+q-1)+(p+q) = \frac{(p+q)\,(p+q+1)}{2}$$

であるから，

$$f(p,q) = \frac{\ell\,(\ell+1)}{2} + q + 1, \qquad \ell = p+q$$

と表される．

単射：格子点 (p_1,q_1)，$(p_2,q_2) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ に対して $f(p_1,q_1) = f(p_2,q_2)$ とし，$\ell_1 = p_1+q_1$，$\ell_2 = p_2+q_2$ とおく．一般性を失うことなく，$\ell_1 \leq \ell_2$ と仮定してよい．$\ell_1 < \ell_2$ のとき，$\ell_1+1 \leq \ell_2$，$q_1 \leq \ell_1$，$q_2 \geq 0$ より

$$\frac{\ell_2\,(\ell_2+1)}{2} \geq \frac{(\ell_1+1)\,(\ell_1+2)}{2} \geq \frac{\ell_1\,(\ell_1+1)}{2} + \ell_1 + 1 \geq f(p_1,q_1) = f(p_2,q_2) \geq \frac{\ell_2\,(\ell_2+1)}{2} + 1$$

となり，矛盾である．したがって，$\ell_1 = \ell_2$ であり，

$$0 = f(p_1,q_1) - f(p_2,q_2) = q_1 - q_2$$

より $(p_1,q_1) = (p_2,q_2)$ が得られる．このことから $f(p,q)$ は単射である．

全射：任意に $r \in \mathbb{N}$ を取る．不等式

$$\frac{\ell\,(\ell+1)}{2} < r \leq \frac{(\ell+1)\,(\ell+2)}{2}$$

をみたす $\ell \in \mathbb{N}_0$ が存在する．

$$q = r - \frac{\ell\,(\ell+1)}{2} - 1, \qquad p = \ell - q$$

とおくと，

$$0 \leq q \leq \frac{(\ell+1)\,(\ell+2)}{2} - \frac{\ell\,(\ell+1)}{2} - 1 = \ell, \qquad 0 \leq p = \ell - q \leq \ell$$

より $(p,q) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ であり，$f(p,q) = r$ が成り立つ．したがって，$f(p,q)$ は全射である．■