

解析学2 解答例

2018.05.07

■ 次の問に答えよ.

- (1) 开区間 $(0, 1)$ から実数全体 \mathbb{R} への全単射の例を示せ.
- (2) 閉区間 $[0, 1]$ から半开区間 $[0, 1)$ への全単射の例を示せ.

(解) (1) 関数 $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$f(x) = \tan \left\{ \pi \left(x - \frac{1}{2} \right) \right\} = -\frac{\cos \pi x}{\sin \pi x}$$

により定義すると,

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = +\infty, \quad f'(x) = \frac{\pi}{\sin^2 \pi x} > 0 \quad (x \in (0, 1))$$

より, $f(x)$ は全単射である.

(2) $A = \{2^{1-k} \mid k \in \mathbb{N}\}$, $B = [0, 1] \setminus A$ とし, 関数 $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1)$, $g : [0, 1) \rightarrow [0, 1]$ をそれぞれ

$$f(x) = \begin{cases} x/2 & (x \in A), \\ x & (x \in B), \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 2x & (x \in A \setminus \{1\}), \\ x & (x \in B) \end{cases}$$

により定義する.

$$f(A) = A \setminus \{1\}, \quad f(B) = B, \quad g(A \setminus \{1\}) = A, \quad g(B) = B$$

より

$$(g \circ f)(x) = x \quad (x \in [0, 1]), \quad (f \circ g)(x) = x \quad (x \in [0, 1))$$

となるので, g は f の逆関数である. したがって, f は全射である. ■