解析学２　解答例

2018.05.21

■ (A, B) を $\mathbb{R}$ の切断とする．$B \cap \mathbb{Q}$ に最小元が存在しないとき，$\mathbb{Q}$ の切断 $\gamma = (A \cap \mathbb{Q}, B \cap \mathbb{Q})$ は実数である．このとき，すべての x に対して，$x \in B$ ならば $x \geq_{\mathbb{R}} \gamma$ が成り立つことを示せ．

（解） $x <_{\mathbb{R}} \gamma$ であると仮定する．有理数の稠密性により，ある $q \in \mathbb{Q}$ が取れて，$x <_{\mathbb{R}} q <_{\mathbb{R}} \gamma$ が成り立つ．$q \not>_{\mathbb{R}} \gamma$ であるから，既に示している命題 $(\#)$[*1] より $q \notin B \cap \mathbb{Q}$，つまり，$q \in A \cap \mathbb{Q} \subset A$ である．(D2) と $x <_{\mathbb{R}} q$ より $x \in A$，つまり，$x \notin B$ である．したがって，$x <_{\mathbb{R}} \gamma$ ならば $x \notin B$ が成り立つ．対偶を取り，順序関係 $\leq_{\mathbb{R}}$ が全順序であることより，$x \in B$ ならば $x \geq_{\mathbb{R}} \gamma$ が成り立つ． ■

[*1] 任意の $x \in (A, B) \in \mathbb{R}$，$q \in \mathbb{Q}$ に対して，$q >_{\mathbb{R}} x$ であることと，$q \in B$ であることは同値である．ここで，各 $q \in \mathbb{Q}$ に対して，$\mathbb{Q}_q = \{\, x \in \mathbb{Q} \,|\, x > q \,\}$ とし，$q \in \mathbb{Q}$ と $(\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Q}_q, \mathbb{Q}_q) \in \mathbb{R}$ を同一視する．