解析学２　解答例

2018.05.28

■　数列 $\{\, a_n \,\}$，$\{\, b_n \,\}$ を

$$a_n = \frac{1}{n}, \qquad b_n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n} \right), \qquad n \in \mathbb{N}$$

により定め，$\mathbb{R}$ の部分集合 A を (1) $A = \{\, a_n \,|\, n \in \mathbb{N} \,\}$, (2) $A = \{\, b_n \,|\, n \in \mathbb{N} \,\}$ とおく．それぞれの場合について，A の上界の集合 $U(A)$，下界の集合 $L(A)$，上限 $\sup A$，下限 $\inf A$ を調べよ．

（解） (1) $a \leq 0$ のとき，すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $a \leq 0 < a_n$ が成り立つので，$a \in L(A)$ であり，$a > 0$ のとき，$1/a$ の整数部分を n とすると，$a_{n+1} < a_n \leq a$ より $a \notin L(A)$ である．したがって，$L(A) = (-\infty, 0]$ であり，$\inf A = \max L(A) = 0$ である．また，$a \geq 1$ のとき，すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $a \geq a_n$ が成り立つので，$a \in U(A)$ であり，$a < 1$ のとき，$a < 1 = a_1$ より $a \notin U(A)$ である．したがって，$U(A) = [1, +\infty)$ であり，$\sup A = \min U(A) = 1$ である．

(2) $a \leq -2$ のとき，すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $a \leq -2 = b_1 \leq -|\, b_n \,| \leq b_n$ が成り立つので，$a \in L(A)$ であり，$a > -2$ のとき，$a > -2 = b_1$ より $a \notin L(A)$ である．したがって，$L(A) = (-\infty, -2]$ であり，$\inf A = \max L(A) = -2$ である．また，$a \geq 3/2$ のとき，すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $a \geq 3/2 = b_2 \geq b_n$ が成り立つので，$a \in U(A)$ であり，$a < 3/2$ のとき，$a < 3/2 = b_2$ より $a \notin U(A)$ である．したがって，$U(A) = [3/2, +\infty)$ であり，$\sup A = \min U(A) = 3/2$ である．■