

■ $\mathbb{R}$ の空でない部分集合 A が下に有界であるとき, A の下限 $\inf A$ が存在することを示せ.

(解) $\hat{A} = L(A)$, $\hat{B} = \mathbb{R} \setminus L(A)$ とおく. A が下に有界であるから, $\hat{A} = L(A) \neq \emptyset$ である. また, $x \in A$ に対して $x < x+1$ より $x+1 \notin L(A)$, つまり, $x+1 \in \hat{B}$ である. したがって, $\hat{B} \neq \emptyset$ が得られ, 対 $(\hat{A}, \hat{B})$ は $\mathbb{R}$ の切断の条件 (D1) をみたす. 任意の $a \in \hat{A}$, $b \leq a$ に対して, すべての $x \in A$ に対し $b \leq a \leq x$ が成り立つので, $b \in \hat{A}$ である. 対偶を取ることにより,

$$\begin{aligned} a \in \hat{A} \wedge b \in \hat{B} &\iff a \in \hat{A} \wedge b \notin \hat{A} \\ &\implies a \in \hat{A} \wedge (a \notin \hat{A} \vee b > a) \\ &\iff (a \in \hat{A} \wedge a \notin \hat{A}) \vee (a \in \hat{A} \wedge b > a) \\ &\iff a \in \hat{A} \wedge b > a \implies b > a \end{aligned}$$

となるので, 対 $(\hat{A}, \hat{B})$ は $\mathbb{R}$ の切断の条件 (D2) をみたす. 以上から, $(\hat{A}, \hat{B})$ は $\mathbb{R}$ の切断である.

実数の連続性より $\max \hat{A}$ または $\min \hat{B}$ のいずれか一方が存在する. $b = \min \hat{B}$ が存在すると仮定する. b は A の下界ではないので, $a < b$ をみたす $a \in A$ が存在し,

$$a < c = \frac{a+b}{2} < b$$

より c は A の下界ではない, つまり, $c \in \hat{B}$ である. これは b の最小性に矛盾である. したがって, $\min \hat{B}$ は存在しないので, $\max \hat{A}$ が存在し, $\inf A = \max \hat{A}$ である. ■