解析学２　解答例

2018.06.11

■　漸化式

$$a_1 = 1, \qquad a_2 = 1; \qquad a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, \qquad n = 0, 1, 2, \cdots$$

で定められる数列 $\{\, a_n \,\}$ の一般項を求めよ．

（解）　方程式 $x^2 = x + 1$ の解を

$$\alpha = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \qquad \beta = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

とすると，解と係数の関係により $\alpha + \beta = 1$，$\alpha\,\beta = -1$ が得られる．各自然数 n に対して，

$$\begin{aligned} a_{n+2} - \alpha\, a_{n+1} =& a_{n+1} + a_n - \alpha\, a_{n+1} = \beta\, a_{n+1} - \alpha\,\beta\, a_n = \beta\,(a_{n+1} - \alpha\, a_n), \\ a_{n+2} - \beta\, a_{n+1} =& a_{n+1} + a_n - \beta\, a_{n+1} = \alpha\, a_{n+1} - \alpha\,\beta\, a_n = \alpha\,(a_{n+1} - \beta\, a_n) \end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned} a_{n+1} - \alpha\, a_n =& \beta^{n-1}\,(a_2 - \alpha\, a_1) = \beta^{n-1}\,(1 - \alpha) = \beta^n, \\ a_{n+1} - \beta\, a_n =& \alpha^{n-1}\,(a_2 - \beta\, a_1) = \alpha^{n-1}\,(1 - \beta) = \alpha^n \end{aligned}$$

となり，

$$a_n = \frac{\beta^n - \alpha^n}{\beta - \alpha} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right\}$$

である．■