解析学２　解答例

2018.06.18

■　数列 $\{ a_n \}$ および $\{ b_n \}$ が

$$a_n \le a_{n+1} < b_{n+1} \le b_n, \qquad b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{2}, \qquad n = 0, 1, 2, \cdots$$

をみたすとき，極限 $\lim_{n\to\infty} a_n$ および $\lim_{n\to\infty} b_n$ が存在するかどうか，関係式 $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$ が成り立つかどうか調べよ．

（解） $\mathbb{R}$ の部分集合 A を $A = \{ a_n \,|\, n \in \mathbb{N} \}$ により定義する．すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n \le b_1$ であるから，実数の制限完備生により $a = \sup A$ が存在する．$\varepsilon > 0$ を任意にとる．$a = \sup A$ より，$a_{n_0} > a - \varepsilon$ をみたす $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在し，すべての自然数 $n \ge n_0$ に対して

$$a - \varepsilon < a_{n_0} \le a_n \le a < a + \varepsilon, \qquad \text{つまり，} \quad |\, a_n - a \,| < \varepsilon$$

が成り立つ．したがって，数列 $\{ a_n \}$ は a に収束する．同様に，$B = \{ b_n \,|\, n \in \mathbb{N} \}$ とおくと，B は下に有界であるから，$b = \inf B$ が存在し，$\lim_{n\to\infty} b_n = b$ であることが示せる．

数列 $\{ b_n - a_n \}$ は公比 $1/2$ の等比数列であるから，

$$b_n - a_n = 2^{1-n}\,(b_1 - a_1), \qquad n \in \mathbb{N}$$

と表せ，$\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$ である．したがって，

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \{(b_n - a_n) + a_n\} = \lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) + \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n$$

となる．■