解析学２　解答例

2018.07.02

■　次の問いに答えよ．

[1] 集合 A，B，C に対して，$A \subset C$ かつ $B \subset C$ であるならば，$A \cup B \subset C$ であることを示せ．

[2] 集合 X の部分集合 A，B について，$A \cap B = \varnothing$ であることと，$A \subset X \setminus B$ であることは同値であることを示せ．

（解） [1] $x \in A \cup B$ を任意にとる．このとき，(i) $x \in A$ または (ii) $x \in B$ が成り立つ．(i) の場合には，$A \subset C$ より $x \in C$ であり，(ii) の場合には，$B \subset C$ より $x \in C$ である．何れの場合にも $x \in C$ となる．したがって，$A \cup B \subset C$ である．

[2] X の任意の部分集合 A，B に対して，$A \subset B$ と $A = A \cap B$ は同値である[*1]ことに注意したい．$A \cap B = \varnothing$ とすると，$X = B \cup (X \setminus B)$ と分配法則により

$$A = A \cap X = (A \cap B) \cup \{A \cap (X \setminus B)\} = A \cap (X \setminus B)$$

が成り立つので，$A \subset X \setminus B$ である．逆に，$A \subset X \setminus B$ とすると，

$$A \cap B = \{A \cap (X \setminus B)\} \cap B = A \cap \{(X \setminus B) \cap B\} = A \cap \varnothing = \varnothing$$

が得られる．したがって，$A \cap B = \varnothing$ と $A \subset X \setminus B$ は同値である．■

[*1] 積集合の定義から，$A \cap B \subset A$ が成り立つ．$A \subset B$ とすると，$A = A \cap A \subset A \cap B$ が得られ，$A = A \cap B$ である．逆に，$A = A \cap B$ とすると，$A = A \cap B \subset B$ である．したがって，$A \subset B$ と $A = A \cap B$ は同値である．