

解析学概論 試験問題 解答例

2010 年 8 月 20 日

1 数学的帰納法を用いて、すべての自然数 n に対して次の命題が成り立つことを示す.

(P) Y_n と Z_n は最高次の係数が正である X に関する n 次多項式, Y_{n+1} と Z_{n+1} は最高次の係数が正である X に関する $(n+1)$ 次多項式である.

(i) 三角関数の加法定理より

$$\begin{aligned} Y_1 &= \cos \theta = X, & Z_1 &= \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{\sin \theta} = 2 \cos \theta = 2X, \\ Y_2 &= 2 \cos^2 \theta - 1 = 2X^2 - 1, & Z_2 &= \cos 2\theta + \cos \theta \frac{\sin 2\theta}{\sin \theta} = 4X^2 - 1 \end{aligned}$$

が得られ, $n=1$ のとき (P) が成り立つ.

(ii) $n=k$ のとき (P) が成り立つと仮定する. このとき, Y_{k+1} と Z_{k+1} は最高次の係数が正である X に関する $(k+1)$ 次多項式である. 三角関数の加法定理より

$$\begin{aligned} Y_{k+2} &= \cos \theta \cos(k+1)\theta - \sin^2 \theta \frac{\sin(k+1)\theta}{\sin \theta} = X Y_{k+1} + X^2 Z_k - Z_k, \\ Z_{k+2} &= \cos(k+2)\theta + \cos \theta \frac{\sin(k+2)\theta}{\sin \theta} = Y_{k+2} + X Z_{k+1} \end{aligned}$$

が得られ, $n=k+1$ のときも (P) が成り立つ.

数学的帰納法より, すべての自然数 n に対して (P) が成り立つ. したがって, すべての自然数 n に対して, Y_n と Z_n は X に関する n 次多項式である.

2 (i) $p \leq p$, $q \geq q$ であるから, 定義より $(p, q) \preceq (p, q)$ が成り立つ.

(ii) $(p_1, q_1) \preceq (p_2, q_2)$ かつ $(p_2, q_2) \preceq (p_1, q_1)$ とする. 定義より $p_1 \leq p_2$, $q_1 \geq q_2$, $p_2 \leq p_1$, $q_2 \geq q_1$ であるから, $p_1 = p_2$ かつ $q_1 = q_2$ が得られ, $(p_1, q_1) = (p_2, q_2)$ が成り立つ.

(iii) $(p_1, q_1) \preceq (p_2, q_2)$ かつ $(p_2, q_2) \preceq (p_3, q_3)$ とする. 定義より $p_1 \leq p_2$, $q_1 \geq q_2$, $p_2 \leq p_3$, $q_2 \geq q_3$ であるから, $p_1 \leq p_3$ かつ $q_1 \geq q_3$ が得られる. 定義より $(p_1, q_1) \preceq (p_3, q_3)$ が成り立つ.

以上より, 二項関係 $\preceq$ は X における (半) 順序関係である. また, 二項関係 $\preceq$ において, $p_1 < p_2$ かつ $q_1 < q_2$ をみたす (p_1, q_1) , (p_2, q_2) に対しては順序をつけることができないので, 全順序関係ではない.

3 (1) (i) $p - p = 0 \in \mathbb{Z}$ より $p \sim p$ が成り立つ.

(ii) $p \sim q$ とする. 定義より, $p - q = k \in \mathbb{Z}$ であるから, $q - p = -k \in \mathbb{Z}$ が得られ, $q \sim p$ が成り立つ.

(iii) $p \sim q$ かつ $q \sim r$ とする. 定義より, $p - q = k \in \mathbb{Z}$, $q - r = \ell \in \mathbb{Z}$ であるから, $p - r = (p - q) + (q - r) = k + \ell \in \mathbb{Z}$ が得られ, $p \sim r$ が成り立つ.

以上から, 二項関係 $\sim$ は X における同値関係である.

- (2) $A = \{p + k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ とおく. $q \in [p]$ を任意にとると, $q \sim p$ より $q - p = k \in \mathbb{Z}$ であるから, $q = p + k \in A$ である. したがって, $[p] \subset A$ である. 逆に, $q \in A$ を任意にとると, $q = p + k$ となる $k \in \mathbb{Z}$ がとれるので, $q - p = k \in \mathbb{Z}$ より $q \sim p$ であり, $q \in [p]$ となる. したがって, $A \subset [p]$ である. 以上をまとめると, $[p] = A$, つまり, $[p] = \{p + k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ である.
- (3) $[p] = [p']$ かつ $[q] = [q']$ とする. $p \sim p'$, $q \sim q'$ より, $p - p' = k \in \mathbb{Z}$, $q - q' = \ell \in \mathbb{Z}$ である.

$$(p + q) - (p' + q') = (p - p') + (q - q') = k + \ell \in \mathbb{Z}$$

より $[p + q] = [p' + q']$ が成り立つ. したがって, 演算 $\#$ は代表元の取り方に依存せずうまく定義できている.

- (4) (i) $[p] \# [q] = [p + q] \in X$ より, X における演算 $\#$ は閉じている.
(ii) $\mathbb{Q}$ における加法の結合法則より

$$([p] \# [q]) \# [r] = [p + q] \# [r] = [(p + q) + r] = [p + (q + r)] = [p] \# [q + r] = [p] \# ([q] \# [r])$$

が得られ, 演算 $\#$ に対して結合法則が成り立つ.

- (iii) 任意の $[p] \in X$ に対して $[p] \# [0] = [p] = [0] \# [p]$ が成り立つので, $[0]$ は演算 $\#$ に対する単位元である.
- (iv) 任意の $[p] \in X$ に対して, $-q \in \mathbb{Q}$ より $[-p] \in X$ であり, $[-p]$ は $[p] \# [-p] = [0] = [-p] \# [p]$ をみたすので, $[-p]$ は演算 $\#$ に対する $[p]$ の逆元である.

以上から, $(X, \#)$ は群である.